Progetto Olimpiadi della Matematica

Istruzioni Generali

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Si ricorda anche che occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo degli zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera. Si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
  $\sqrt{2} \approx 1,4142$ $\sqrt{3} \approx 1,7321$ $\sqrt{5} \approx 2,2361$ $\pi \approx 3,1416$.

LIVE
FROM NEW YORK
IT'S SATURDAY NIGHT!

3 marzo 2017

Gara a Squadre – Testi dei problemi

1. *La famiglia Conehead*

Connie Sono andata a far la spesa. Alla cassa del supermercato, mi hanno consegnato uno scontrino rettangolare: ho misurato i lati. Sono lunghi 8 cm e 54 cm. L'ho messo in tasca, ma ha fatto tante pieghe.

Papà Beldar Qual è l'area dello scontrino piegato?

Connie Non lo so!

Papà Beldar Usa questo chiodo e buca tutti gli strati dello scontrino piegato. Quante volte hai bucato la carta?

Connie Sette.

Papà Beldar Quanto misura in mm^2 al minimo l'area dello scontrino piegato?

2. *I Fratelli Festrunks*

Yortuk Il conto delle pizze è di $45,10$\$.

Georg La mia pizza costava meno della sua.

Fox Ma non mi offrite nemmeno la pizza?!?

Yortuk Facciamo così: Fox paga 1\$ per ogni persona con una maglietta nera presente nel bar e $0,50$\$ per ogni persona con una maglietta rossa; Georg paga $1,30$\$ per ogni persona con una maglietta rossa e $0,50$\$ per ogni persona con una maglietta nera; io pago $0,50$\$ per ogni altra persona (cioè senza una maglietta né rossa né nera) presente nel bar.
Pagano e escono dal bar.

Fox Come facevi a sapere che avremmo pagato esattamente il conto?

Yortuk Perché c'erano 50 persone nel bar. (*Insieme con Georg*) Siamo due tipi spontanei e folli!

Voce fuori campo QUANTO HA PAGATO FOX IN CENTESIMI?

3. *In cucina con Julia*

Julia (*Parlando alla telecamera con tono molto deciso, ma gioviale*) Care amiche, vedete questo recipiente cilindrico bianco pieno di salsa—potreste pensare che sia sangue (*Intinge un mestolo dentro al recipiente e lo estrae tutto rosso*), ma è proprio salsa di pomodoro. L'ho preparata spremendo 43 pomodori che poi ho passato con molta cura come ho imparato a Parì. Bisogna sempre fare molta attenzione alle dimensioni dei recipienti: questo bianco ha diametro di base di 20 cm e altezza di 24 cm. Quei recipienti cilindrici gialli che vedete là hanno diametro di base di 12 cm e altezza di 10 cm. Perciò—tanto per farla vedere a quegli insulsi maschi sciovinisti che pensano che le donne non siano in grado fare matematica—sappiamo quanti sono i recipienti che potremo riempire completamente perché poi dovremo chiuderli ermeticamente. (*La trasmissione televisiva si interrompe di colpo.*)

Voce fuori campo QUANTI RECIPIENTI GIALLI RIEMPIE JULIA?

4. *Samurai Farm*

Ogni giorno, esclusi i lunedì, Samurai Futaba passa davanti a un melo, sul quale cresce una nuova mela ogni notte. Samurai Futaba ha con sé piccoli contenitori da frutta diversi ogni giorno: al martedì contenitori da 2 mele ciascuno, al mercoledì da 3 mele, al giovedì da 4, al venerdì da 5, al sabato da 6 e alla domenica da 7. Samurai Futaba raccoglie le mele dall'albero esattamente quando esse sono tante da non lasciare spazi vuoti nei contenitori che ha con sé quel giorno (ad esempio se un martedì ci sono 5 mele sull'albero Samurai Futaba non ne raccoglie nessuna, se ce ne sono 6 le raccoglie tutte). Oggi sull'albero c'è una mela..

Voce fuori campo QUANTE MELE RACCOGLIERÀ SAMURAI FUTABA DA OGGI, VENERDÌ 3 MARZO 2017, AL 31 DICEMBRE DI QUEST'ANNO?

5. *Connie conta i minuti*

Connie Papà, guarda quell'orologio sul muro. Le lancette si muovono a scatti ogni minuto.

Papà Beldar Ora è mezzogiorno.

Connie Quanti minuti ci vorranno come minimo perché la lancetta delle ore e quella dei minuti formino un angolo di $24°$?

6. ***La gallina della famiglia Conehead***

Papà Beldar è sulla porta di casa e guarda la sua gallina molto rara. La gallina produce uova solo alle 8 di mattina e non tutti i giorni. La probabilità che produca un uovo alle 8 di mattina vale $\frac{n}{n+1}$ *dove* n *è il numero di giorni che sono passati dall'ultimo uovo prodotto. Si volta verso l'interno..*

Papà Beldar Sono le 9 di venerdì; un'ora fa la gallina ha prodotto un uovo. Ora parto e tornerò esattamente alle 9 di mattina di venerdì prossimo. Ciao! (*Tocca con la sua testa a cono quelle di Mamma Prymaat e di Connie.*)

Voce fuori campo QUAL È LA PROBABILITÀ DI TROVARE AL SUO RITORNO ALMENO 5 NUOVE UOVA?

[*Dare come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*]

7. ***Le cifre italiane***

Papà Beldar Facciamo il gioco delle cifre italiane?

Connie SÌ!

Papà Beldar Ricorda: $l_d(n)$ indica il numero delle lettere nella parola italiana che è la cifra delle decine del numero n. Ad esempio $l_d(10) = 3$.

Connie Mentre $l_d(40) = 7$. In italiano ci sono 4 cifre che hanno tre lettere, 3 cifre che hanno quattro lettere, una con cinque lettere, una con sei e una con sette; vero, papà?

Papà Beldar Sì, brava! Considera ora la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n + l_d(a_n) \end{cases}$$

Connie Adesso la scrivo tutta (*si mette a scrivere molto in fretta su un foglio*).

Passano dieci minuti. Mamma Prymaat entra.

Mamma Prymaat State facendo un gioco con le cifre italiane. Connie, che numero hai scritto ora?

Connie a_{2017}.

Voce fuori campo CHE NUMERO HA SCRITTO ORA CONNIE?

8. ***Il viaggio della famiglia Conehead***

Esterno, su Long Island. La famiglia Conehead, come ogni primo giorno del mese, deve recarsi dalla nonna in macchina. Ogni volta il viaggio dura un'ora esatta perché il papà tiene sempre la stessa velocità, di poco sotto il limite. Questa volta hanno deciso di fare un gioco: partendo alle ore 10:00 esatte dell'orologio dell'auto, ciascuno scommetterà sull'ora che segnerà il medesimo orologio all'arrivo. Ma ognuno di loro ha una strategia.

Papà Beldar (Parla, rivolto alla telecamera, prima di salire in auto per mettersi alla guida) Ho scommesso su 10:30. Per vincere, guarderò il contachilometri per andare al doppio della velocità che tengo di solito.

Mamma Prymaat Ho scommesso su 11:10. Durante il viaggio li costringerò a fermarsi per 10 minuti esatti fingendo di stare male.

Connie Ho scommesso su 10:40 e, durante il viaggio, quando nessuno guarderà, sposterò indietro l'orologio di 20 minuti.

Frank Ho scommesso su 11:20. Per vincere modificherò il contachilometri dell'auto affinché segni sempre $\frac{1}{3}$ in più della velocità effettiva.

Voce fuori campo SAPENDO CHE ESATTAMENTE UNO DEI QUATTRO NON RIESCE A METTERE IN ATTO IL SUO PIANO E CHE UNA PERSONA HA VINTO, QUAL È LA DURATA EFFETTIVA DEL VIAGGIO IN MINUTI? (OGNI SOSTA È COMPRESA NEL TEMPO DI VIAGGIO.)

9. ***Telefonata in Canada***

Il presidente biondo Steve, chiamiamo il Canada?

Steve PERCHÉ NO, PRESIDENTE?

Il presidente biondo (*Al telefono*) Pronto, Justin. È il presidente che parla. Forse tu sei troppo giovane per conoscere le equazioni di secondo grado? (*Rumori indistinti nella cornetta*) Bene: allora sai dirmi per quanti valori interi del parametro a l'equazione $x^2 + ax + 2017^{2017}$ ha due radici intere?

10. *L'Italia va in guerra*

Il presidente biondo Steve, chi chiamo ora?

Steve Proviamo con un alleato facile, presidente; chiamiamo l'Italia.

Il presidente biondo (*Al telefono*) Pronto, Paolo! Quanti sono i numeri di sei cifre non divisibili per 7 e tali che la somma delle loro cifre sia 3? (*Silenzio*) Ma non sai nemmeno contare? Siete voi che continuate a fare quella stupida divisione tra le due culture? (*Il silenzio continua*) Sveglia!!! Il Colosseo non sta più in piedi, l'Italia va a pezzi, l'America è la migliore! Preparati alla guerra! (*Sbatte giù la cornetta.*)

11. *L'Australia va in guerra*

Il presidente biondo Steve, chiamiamo l'Australia? Dopo tutto, che cosa può andare storto?

Steve Certo, presidente.

Il presidente biondo (*Al telefono*) Pronto, Malcolm. È il presidente che parla. Quanti numeri naturali sono uguali alla somma tra la somma delle loro cifre e il prodotto delle loro cifre? (*Si sente un mormorio indistinto dalla cornetta*) Non lo sai?!? L'America è la migliore, l'Australia fa schifo! Preparati alla guerra! (*Sbatte giù la cornetta.*)

Steve Quanti numeri sono, presidente?

Il presidente biondo Incluso lo zero?

Steve Lo zero è il PRIMO numero naturale, presidente!

12. *Ricorda con rabbia*

Cimitero, tombe con solo una stele di pietra a distinguere i cumuli.

John (*Capelli bianchi, si appoggia a un bastone*) Ci sono tutti, sono sepolti qui: Jane, Garrett, Gilda, Bill,... E Dan: ha voluto che la stele fosse un trapezio, chissà perché? Non sapeva neppure che cosa fosse. Il marmista poi si è scatenato: ha fissato i punti medi dei lati obliqui, disegnato il segmento che li congiunge, e ha ottenuto una croce disegnando anche l'altezza del trapezio tracciata da un vertice della base minore e una circonferenza a rappresentare il sole che tocca la croce nei quattro vertici. In più ha racchiuso un numero nella stele: il rapporto tra i due segmenti che formano la croce. Mi hanno detto che l'area del trapezio è $5600\,\mathrm{dm}^2$ e il prodotto delle lunghezze dei due bracci orizzontali della croce è $100\,\mathrm{dm}^2$. Ma quanto vale il rapporto tra il segmento più lungo e quello più corto nella croce? Io sono l'unico ancora vivo a chiedermi questa domanda; perché? (*Si rasserena, getta il bastone, inizia a ballare.*) Perché sono un matematico.

13. *Samurai Solitario*

Samurai Futaba fa un solitario con le 10 carte di Picche, dall'asso al 10. Si vedono le altre 42 carte del mazzo tagliate a metà e sparse sul tavolo. Mescola accuratamente le 10 carte integre. Appoggia il mazzo coperto sul tavolo.

Samurai Futaba (*Solleva la carta in cima al mazzo coperto*) 8 (*La gira, è il 3, appoggia la carta scoperta sul tavolo. Solleva la carta che è ora in cima al mazzo coperto*) 9 (*La gira, è il 7, appoggia la carta scoperta sul tavolo. Solleva la carta in cima al mazzo coperto*) 10 (*La gira, è l'asso, appoggia la carta scoperta sul tavolo. Solleva la carta in cima al mazzo coperto*) 8 (*La gira, è il 10, appoggia la carta scoperta sul tavolo. Solleva la carta in cima al mazzo coperto*) 9 (*La gira, è il 9, appoggia la carta scoperta sul tavolo. Scuote la testa sconsolato, guardando la telecamera*) Hicotushi nopetiti hacasumai. (*Scorrono i sottotitoli:* «Non riesco a completare questo solitario.») Maracatoni petele machì 8, 9 atuti 10 manupiro ducató 8, 9, 10, 8, 9, 10, 8, 9, 10, 8 anacogiro minicotù. (*Altri sottotitoli:* «Il solitario si completa se le carte 8, 9 o 10 non vengono girate nel momento in cui si dice lo stesso numero nella sequenza 8, 9, 10, 8, 9, 10, 8, 9, 10, 8.»)

Voce fuori campo Qual è la probabilità di riuscita del solitario?

[*Dare la risposta come somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini*]

14. ***Il dilemma dei Fratelli Festrunks***

Yortuk Dobbiamo trasportare questi sette tubi, come facciamo?

Georg Sono tutti lunghi 3 m e hanno la stessa sezione circolare di diametro 50 cm. Siamo due tipi spontanei e folli: li fissiamo tutti insieme, uno al centro con gli altri sei attorno, e li blocchiamo con questi tre elastici.

Yortuk Hai ragione; così ciascuno dei sei tubi all'esterno è tangente al tubo centrale e ad altri due esterni. (*Guarda soddisfatto il blocco realizzato*) Quanti millimetri è lungo ogni elastico che avvolge il blocco?

15. ***Il Messico va in guerra***

Il presidente biondo Che bello, Steve! Come mi diverto; mi è venuta un'idea per far pagare al Messico la costruzione del muro. Adesso lo chiamo.

Steve Bene, presidente.

Il presidente biondo (*Al telefono*) Pronto, Enrique! Ti propongo una scommessa: tu mi dici quanti numeri naturali scrivere; io ne scrivo quanti hai detto, quelli che voglio. Vinci se almeno due tra i numeri che ho scritto sono tali che la loro somma o la loro differenza è divisibile per 10000. Chi perde paga la costruzione del muro.

Steve La scommessa non è equa, presidente.

Il presidente biondo Lo so.

Steve Vince lui!

Voce fuori campo Qual è il più piccolo numero che Enrique deve dire per vincere la scommessa?

16. ***Connie scrive una T***

Connie sta giocando con cinque figure di legno.

Papà Beldar I terrestri amano le figure piane semplici. Tutti gli angoli acuti di quelle cinque con cui stai giocando sono di 45°.

Connie Hai ragione, papà! Sono proprio semplici: due sono triangoli rettangoli isosceli, due trapezi rettangoli e un parallelogramma. Ho misurato le dimensioni essenziali: i cateti dei triangoli rettangoli misurano 5 cm che è la stessa lunghezza delle altezze dei quadrilateri. Ciascun trapezio ha basi lunghe 3 cm e 8 cm; il lato minore del parallelogramma misura 7 cm.

Papà Beldar Lo sai che la figura che hai costruito accostando le cinque figure è una lettera T terrestre?

Connie Vuoi dire che leggono "T" due rettangoli, uno perpendicolare all'altro con lati minori uguali?

Papà Beldar Sì! Quanto vale in mm il perimetro della "T" che hai costruito?

17. ***Samurai Scarta***

Mr. Dantley Si gioca con un mazzo di 16 carte, divise in 2 semi, Cuori e Picche, con i numeri da 1 a 8 per ciascun seme. A turno, ciascuno di noi scarta una carta dalla propria mano sul tavolo: questa deve essere come numero consecutiva (precedente o successiva) all'ultima giocata (non importa il seme). (*Mr. Dantley distribuisce equamente le carte in modo casuale tra lui e Samurai Futaba*) Inizia chi tra noi ha in mano l'1 di Picche, giocandolo sul tavolo. Vince chi costringe l'avversario a non poter più giocare carte; invece, se entrambi i giocatori le finiscono, è dichiarata parità e non vince nessuno. Tanto per essere sicuro di essermi spiegato, supponendo che entrambi giochiamo con la migliore strategia possibile, prima di guardare le carte mi dici qual è la tua probabilità di vittoria. (*Samurai Futaba estrae la katana e, con alcuni fendenti, scrive sul muro la frazione, ridotta ai minimi termini, che è la probabilità richiesta da Mr. Dantley.*)

Voce fuori campo Qual è la somma tra numeratore e denominatore della frazione scritta da Samurai Futaba?

18. ***I 21 numeri di Connie***

Connie Mamma, sto scrivendo un elenco di 21 numeri interi, diversi tra loro, in modo tale che la somma di 11 qualunque di essi sia maggiore della somma degli altri 10. Ma non funziona se non uso numeri molto grandi.

Mamma Prymaat Qual è il più piccolo che puoi usare in un elenco del genere?

19. *La Germania va in guerra*

Il presidente biondo Steve, forse dovrei smettere?

Steve NO, PRESIDENTE, STA ANDANDO BENISSIMO. PERCHÉ NON CHIAMA LA GERMANIA?

Il presidente biondo D'accordo. (*Al telefono*) Pronto?

Angela Barack, sei tornato? Quanto mi sei mancato!

Il presidente biondo Sono Donald.

Angela Oh!

Il presidente biondo Ascolta: considera le condizioni

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=26 \\ a+b=5 \\ b+c\geq 7. \end{cases}$$

Quali sono i numeri reali che verificano, Angela?

Angela Anghela, il mio nome si pronuncia Anghela.

Il presidente biondo (*Urlando al telefono*) Non provare a correggermi! Il vostro muro è crollato, la Germania fa schifo, l'America è la migliore! Preparati alla guerra! (*Sbatte giù la cornetta.*)

[*Dare la risposta alla domanda con la somma di tutte le somme di terne che sono soluzione.*]

20. *Samurai Craps*

Mr. Dantley Giochiamo a Samurai Craps. Si tira un dado... (*Samurai Futaba guarda con sospetto Mr. Dantley sfilando leggermente la katana*) Non preoccuparti, non è truccato. Tiro un dado a 20 facce, numerate da 2 a 21, leggo il risultato e ti dico, in modo del tutto casuale, un divisore di quel numero diverso da 1. Vinci se riesci ad indovinare il numero uscito senza guardare il dado.

Voce fuori campo SUPPONENDO CHE SAMURAI FUTABA UTILIZZI LA MIGLIORE STRATEGIA POSSIBILE PER VINCERE, QUAL È LA PROBABILITÀ CHE CIÒ ACCADA?

[*Dare la risposta come somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini*]

21. *Samurai Blackjack*

Mr. Dantley Si gioca con un mazzo di 52 carte: ci sono 13 tipi di carte, 4 per ciascun tipo. I tipi sono l'asso, le carte dal 2 al 10, e le tre figure: il Fante, la Donna e il Re. Nel gioco le carte hanno il valore stampato su di esse, ad eccezione dell'asso che ha valore 1 e delle figure che hanno valore 10. L'obiettivo del gioco è pescare carte dal mazzo cercando, sommando i valori delle carte pescate, di raggiungere il punteggio di 21, senza superarlo. Rompi il mazzo. (*Samurai Futaba estrae la katana e spezza il mazzo in due tagliandolo verticalmente. Mr. Dantley, senza battere ciglio, getta via il mazzo spezzato in due e ne prende un altro.*)

Mr. Dantley Io gioco sempre allo stesso modo: continuo a pescare carte finché il punteggio che ottengo diventa 17 o supera quel valore. Per esempio, se ho pescato 2, 6, 10 smetto di prendere carte, mentre se ho pescato 2, 5, 9 ne prendo un'altra.

Voce fuori campo QUANTE SONO LE SEQUENZE DI CARTE CON CUI MR. DANTLEY REALIZZA 21 CON AL MASSIMO 4 CARTE?

[*Due sequenze sono distinte anche quando differiscono per l'ordine di pescata delle carte, mentre carte dello stesso tipo sono indistinguibili.*]

22. ***Lo Zimbabwe va in guerra***

Il presidente biondo Steve, i nostri alleati non ci ascoltano. . .

Steve CHIAMIAMO QUALCHE PICCOLO PAESE E MOSTRIAMOGLI CHI È IL CAPO. (*Si interrompe un momento per pensare*) CHIAMIAMO LO ZIMBABWE.

Il presidente biondo D'accordo. (*Chiama il dittatore dello Zimbabwe al telefono*) C'è un nuovo boss in giro.

Robert Chi parla? È Donald?

Il presidente biondo (*Contento di venir riconosciuto*) Sì!

Robert (*Con piglio deciso*) Ma chi credi di essere? Credi di sapere tutto tu? Ascolta questa—è complicata, meglio se chiedi aiuto a Steve; tanto è lì di fianco, giusto? (*Il presidente biondo apre la bocca incredulo*) Prendi un rettangolo $ABCD$ con AB lungo 90 km e BC lungo 80 km; disegna due cerchi tangenti tra loro all'interno del rettangolo; inoltre il cerchio di centro P è tangente ai lati AD e DC, il cerchio di centro Q è tangente ai lati AB e BC. Sei ancora lì? (*Il presidente biondo apre ancora di più la bocca*) Stiamo preparando un'arma che ha quelle dimensioni e che spazzerà via il tuo paesucolo insignificante. Ma bisogna sistemare i due cerchi in modo che l'area del triangolo APQ sia la massima possibile, poi coprirla tutta con materiale biologico umano. E sai che cosa useremo? Useremo (*parlando con sicurezza*) il tuo grasso, vecchio corpo fatto a pezzettini così minuscoli che neppure la CIA riuscirebbe a rimetterlo insieme. E non chiamarmi più! (*Sbatte giù la cornetta.*)

Steve (*Parlando sorridente al presidente smarrito*) POTEVA ANDARE PEGGIO. HA CALCOLATO QUANTI KM^2 È L'AREA MASSIMA?

23. ***La strana domanda***

Yortuk e Georg suonano alla porta dei Conehead che aprono e li invitano a entrare..

Yortuk Siamo due tipi spontanei e folli, ma non sappiamo fare le operazioni. Dobbiamo sapere la somma e il prodotto dei nostri due codici, potete calcolarli voi? (*Allunga un foglietto che i Conehead leggono.*)

Connie Certo! La somma dei due codici è 110 e il prodotto dei due codici è 9263.

Papà Beldar Attenti! Connie è un po' distratta: al massimo una cifra della somma e al massimo una del prodotto potrebbero essere sbagliate.

Voce fuori campo QUANTO PUÒ VALERE AL MASSIMO UN CODICE?

24. ***Le carte di Connie***

Connie sta giocando con un mazzo composto da 18 *carte aliene, divise in 2 semi, ciascuno composto da un Re, una Regina, un Fante e i numeri dal* 2 *al* 7*; non ci sono gli Assi. Dopo aver mischiato il mazzo, ogni carta delle 18 parla.*

Carta contrassegnata dal numero n Mi seguono almeno n carte del mio stesso seme.

Carta non contrassegnata da un numero Le carte attaccate a me sono del mio stesso seme.

Connie (*Sconsolata*) I due Re mentono sempre. Meno male che tutte le altre carte dicono sempre il vero.

Voce fuori campo IN QUANTI MODI POSSONO ESSERE ORDINATE LE CARTE NEL MAZZO MISCHIATO DA CONNIE?

Soluzioni per la Coppa Gauss 2017

Un enorme ringraziamento va a tutti coloro che quest'anno, con la solita, pura abnegazione, hanno contribuito a preparare i testi di gara:
Matteo Bobbio, Sandro Campigotto, Mattia Fecit, Alessandro Murchio, Simone Muselli, Franco Obersnel, Maurizio Paolini, Damiano Poletti, Francesco Raspaolo, Alessandro Rosolini, Edi Rosset, Alberto Saracco, Simone Traverso.

Soluzione del problema 1. L'area minima si ottiene se tutte le pieghe sono parallele a un lato, non importa quale. L'area minima è comunque $\dfrac{8 \cdot 54}{7} = 61.71\,\mathrm{cm}^2 = 6171\,\mathrm{mm}^2$.
La risposta è `6171`.

Soluzione del problema 2. Chiamiamo con N il numero di persone con una maglietta nera, con R il numero di quelli con una maglietta rossa e con A il numero delle persone senza maglietta rossa e senza maglietta nera. Il problema diventa

$$\begin{aligned}&100N + 50R + 130R + 50N + 50A = 4510\\ &N + R + A = 50\end{aligned}$$

da cui $100N + 50 \cdot 50 + 130R = 4510$, quindi $100N + 130R = 2010$, cioè $10N + 13R = 201$ che è diofantea. La soluzione cercata è $N = 11$, $R = 7$. Yortuk spende 16\$, Georg $14,60$\$ e Fox $14,50$\$. La risposta è `1450`.

Soluzione del problema 3. Il rapporto tra i due volumi è $\dfrac{\pi 20^2 \cdot 24}{\pi 12^2 \cdot 10} = \dfrac{2 \cdot 10}{3} = \dfrac{20}{3} = 6.\overline{6}$.
La risposta è `0006`.

Soluzione del problema 4. Se oggi è venerdì 3 marzo 2017, da qui al 31 dicembre ci sono 303 giorni; ciò significa che, se Samurai Futaba non raccogliesse mai, il 31 dicembre sull'albero vi sarebbero 304 mele.
Samurai Futaba non può raccogliere la prima settimana dal 3 marzo al 5 marzo perché deve essere $n \geq k$, dove n è il numero di mele sull'albero e k è il numero di mele che stanno nel contenitore del giorno.
Il giorno k di una qualunque settimana (esclusa la prima) in cui si può raccogliere deve essere tale che $k|(k+r)$, ove r è il numero di mele che si trovavano sull'albero la domenica della settimana precedente. Se $k|(k+r)$, allora $k|r$, con p intero positivo. Perciò la seconda settimana Samurai Futaba raccoglie mele mercoledì, poiché $3|(3+3)$. La domenica della seconda settimana vi saranno $7-3=4$ mele sull'albero. La terza settimana Samurai Futaba raccoglie mele martedì dato che $2|(2+4)$ e domenica ci saranno 5 mele sull'albero. La quarta settimana Samurai Futaba raccoglierà di venerdì, e rimarranno 2 mele. Quella dopo martedì e ne rimarranno 5 e così via. A partire dalla terza settimana i resti si ripetono ciclicamente. Quindi tutte le settimane successive si raccoglierà alternativamente martedì e venerdì.
Le settimane tra il 3 marzo e il 31 dicembre sono date dalla divisione $303 = 7 \cdot 43 + 2$. La seconda settimana è esclusa dalle ripetiziioni; quindi ne rimangono 42. In particolare alla quarantaquattresima settimana Samurai Futaba raccoglierà di venerdì: il resto 2 trovato nella divisione indica che il 31 dicembre sarà domenica, dunque il totale delle mele raccolte è $304 - 2 = 302$.
La risposta è `0302`.

Soluzione del problema 5. Due tacche dei minuti adiacenti formano un angolo di $\dfrac{360°}{60} = 6°$. Dato che $\dfrac{24°}{6°} = 4$, la lancetta delle ore deve necessariamente trovarsi su una delle

tacche dei minuti per formare un angolo di 24° con quella dei minuti vista l'imposizione sul movimento della lancetta dei minuti. La lancetta delle ore avanza di una tacca ogni 12 minuti; perciò si sta cercando il più piccolo h tale che $|h - 12h| = 4(\mathrm{mod}60)$, cioè $11h = 4(\mathrm{mod}60)$ oppure $11h = 56(\mathrm{mod}60)$. Il primo ha soluzione $h = 44$, il secondo $h = 16$, che corrispondono alle 20:46 e alle 15:12. [Si noti che la risposta è corretta anche se si considerano angoli orientati.]
La risposta è `0192`.

Soluzione del problema 6. Consideriamo il caso in cui vengano prodotte esattamente 5 uova. 5 giorni la gallina ha prodotto, 2 no. Questi ultimi 2 sono consecutivi o no? Uno dei 2 è venerdì? Si aprono quindi 4 sottocasi che andiamo a discutere:

- Consecutivi, uno dei due è venerdì: 1 caso con probabilità
$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{192}.$$
- Consecutivi, nessuno dei due è venerdì: 5 casi ciascuno con probabilità
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{128}.$$
- Non consecutivi, uno dei due è venerdì: 5 casi ciascuno con probabilità
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{96}.$$
- Non consecutivi, nessuno dei due è venerdì: $\binom{5}{2} = 10$ casi ciascuno con probabilità
$$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{72}.$$

Consideriamo ora il caso in cui vengano prodotte esattamente 6 uova. 6 giorni la gallina ha prodotto, 1 no. Quest'ultimo è venerdì? Si aprono 2 sottocasi che andiamo a discutere:

- Venerdì: 1 caso con probabilità
$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{128}.$$
- Non venerdì: 6 casi ciascuno con probabilità
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{96}.$$

Consideriamo ora il caso in cui vengano prodotte esattamente 7 uova. La gallina ha prodotto tutti e 7 i giorni. Abbiamo quindi 1 caso con probabilità
$$\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128}.$$
Pertanto la probabilità cercata è
$$\frac{1}{192} + 5 \cdot \frac{1}{128} + 5 \cdot \frac{1}{96} + 10 \cdot \frac{1}{72} + \frac{1}{128} + 6 \cdot \frac{1}{96} + \frac{1}{128} = \frac{23}{192} + \frac{7}{128} + \frac{10}{72} = \frac{361}{1152}.$$
La risposta è `1513`.

Soluzione del problema 7.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a_n	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	47	54

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
60	63	66	69	72	77	82	86	90	94	98	102	106	110

Quindi $l_d(a_{27}) = l_d(a_1)$, inoltre anche la cifra delle unità di a_{27} è uguale a quella di a_{10}. Dunque, eseguita la divisione $n-1 = 26 \cdot q + r$ con $0 \leq r < 26$ si ha che

$$a_n = 100 \cdot q + a_{r+1}.$$

Dato che $2017 = 26 \cdot 77 + 15$, è $a_{2017} = 100 \cdot 77 + a_{15} = 7700 + 63 = 7763$.
La risposta è `7763`.

Soluzione del problema 8. Sia T la differenza tra l'ora di arrivo e quella di partenza indicata dall'orologio sull'auto. Consideriamo innanzitutto come agisce il piano di Frank. Sia v la velocità che intende mantenere Papà Beldar e V la velocità reale diversa da quella segnata sul contachilometri per l'azione di Frank. Allora

$$v = V + \frac{1}{3}V,$$

e $V = \frac{3}{4}v$. Invece di impiegare un tempo t, con l'attuazione di questo piano si impiega $\frac{4}{3}t$. Il piano di Papà Beldar invece modifica il tempo impiegato t nel tempo $\frac{1}{2}t$. Supponiamo che:

- Papà Beldar non esegue il piano: $T = \frac{4}{3} \cdot 60 + 10 - 20 = 70$. Arrivo indicato alle 11:10; vince Mamma Prymaat.
- Mamma Prymaat non esegue il piano: $T = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 60 - 20 = 20$. Arrivo indicato alle 10:20; non vince nessuno.
- Connie non esegue il piano: $T = \frac{2}{3} \cdot 60 + 10 = 50$. Arrivo indicato alle 10:50; non vince nessuno.
- Frank non esegue il piano: $T = \frac{1}{2} \cdot 60 + 10 - 20 = 20$. Arrivo indicato alle 10:20; non vince nessuno.

Pertanto la famiglia Conehead arriverà alle 11:10, ma attenzione, la figlia ha spostato indietro di 20 minuti l'ora. Il tempo impiegato sarà quindi di 90 minuti.
La risposta è `0090`.

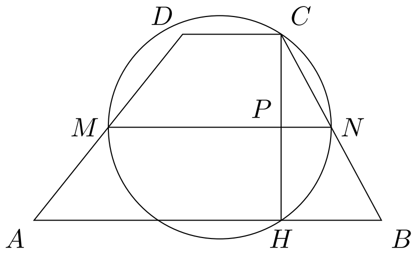
Soluzione del problema 9. Siano x_1 e x_2 le due radici intere di $p(x)$. Ovviamente $x_1x_2 = 2017^{2017}$. Dato che 2017 è un numero primo, l'unica possibilità è che $x_1 = 2017^i$ e $x_2 = 2017^{2017-i}$, oppure $x_1 = -2017^i$ e $x_2 = -2017^{2017-i}$, per i che va da 0 a 2017. Questo corrisponde a 1009 valori diversi di a per il primo caso, e altri 1009 valori diversi per il secondo. Quindi in totale abbiamo 2018 valori diversi di a.
La risposta è `2018`.

Soluzione del problema 10. Si determinano i numeri divisibili per 7 si sei cifre con somma delle cifre uguale a 3. Il resto di un numero di sei cifre $abcdef$ nella divisione con 7 è (congruo modulo 7 a) $f+3e+2d-c-3b-2a$; le cifre verificano la condizione che $a+b+c+d+e+f = 3$ e $a > 0$. Per $a = 1$, si hanno i casi 100002 e 101010. Per $a = 2$, si ha il caso 210000.
I numeri di sei cifre la cui somma delle cifre sia 3 sono composti da cifre che possono essere cinque copie di 0 e 3; quattro copie di 0, 1 e 2; tre copie di 0, e tre copie di 1. Nel primo caso c'è un solo numero: 300000. Nel secondo caso sono cinque con 1 come prima cifra a destra e altre cinque con 2 come prima cifra a destra. Nel terzo caso sono $\binom{5}{2} = 10$. In totale sono $1 + 2 \cdot 5 + 10 = 21$. I numeri richiesti sono $21 - 3 = 18$.
La risposta è `0018`.

Soluzione del problema 11. Sia $P(n)$ la proprietà che il numero naturale n sia uguale alla somma della somma delle sue cifre e del prodotto delle sue cifre. Se n sia un numero di una cifra, $P(n)$ è verificata quando $n + n = n$, cioè $n = 0$. Sia n di due cifre, cioè $n = 10a + b$ per opportune cifre $a > 0$ e b. Dunque $P(n)$ è verificata esattamente quando $a(b+1) = ab + a = 10a$, cioè $b = 9$. Quindi soddisfano P esattamente i nove numeri $10a + 9$, per $0 < a < 10$. Supponiamo $n > 99$, cioè $n = 100a + 10b + c$ per opportune cifre $a > 0$, b e c.

Dunque $P(n)$ è verificata se e solo se $abc+(a+b+c) = 100a+10b+c$, cioè $a(bc-99) = 9b$. Ma $bc < 99$ qualunque siano $b, c \leq 9$. Perciò non ci sono numeri di tre o più cifre che verificano P.
La risposta è `0010`.

Soluzione del problema 12. Sia $ABCD$ il trapezio con base maggiore AB e base minore CD. Siano M e N i punti medi dei due lati obliqui, rispettivamente di AD e di BC. Sia H il piede dell'altezza del trapezio spiccata da C che interseca il segmento MN nel punto P.



Dato che CPN è simile a CHB si ottiene che $AB + CD = 2MN$ e l'area del trapezio è uguale a $MN \cdot CH$. Inoltre, dato che MN è l'asse della corda CH, MN è un diametro della circonferenza che tocca M, H, N e C. Perció $\widehat{MCN}$ è retto e $MP \cdot PN = CP^2 = \frac{1}{4}CH^2$; dunque $CH^2 = 4MP \cdot PN$. Così il rapporto

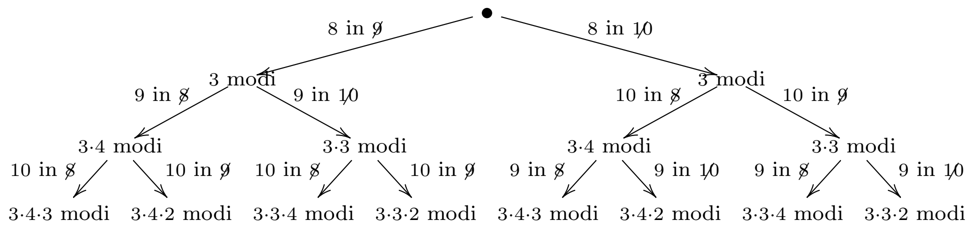
$$\frac{MN}{CH} = \frac{MN \cdot CH}{CH^2} = \frac{5600}{400} = 14.$$

La risposta è `0014`.

Soluzione del problema 13. Le dieci posizioni in cui vengono mescolate le 10 carte sono

$\not 8$	$\not 9$	$\not{10}$	$\not 8$	$\not 9$	$\not{10}$	$\not 8$	$\not 9$	$\not{10}$	$\not 8$

dove, per ciascuna, si è indicato quale carta non deve comparire per la riuscita del solitario. Lo schema sotto indica le posizioni delle tre carte 8, 9 e 10 per la riuscita del solitario:



Per la riuscita del solitario, le scelte per le tre carte sono $2 \cdot [3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 3 \cdot 6] = 2 \cdot 3 \cdot 38 = 228$.
Le altre sette carte possono comparire in una qualunque delle rimanenti posizioni.
La probabilità è

$$\frac{228\,7!}{10!} = \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 19}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{19}{60}.$$

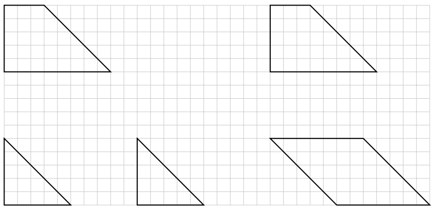
La risposta è `0079`.

Soluzione del problema 14. Il perimetro "esterno" consiste di 6 segmenti di lunghezza pari al diametro delle circonferenze e da 6 archi, ognuno di lunghezza pari a $1/6$ di circonferenza.
Dunque $P = 6 \cdot 500\,\text{mm} + \pi \cdot 500\,\text{mm} = 500\,\text{mm} \cdot (6 + \pi) = 4570\,\text{mm}$.
La risposta è `4570`.

Soluzione del problema 15. Due numeri a e b sono tali che $100000|a - b$ se e solo se $a = b(\text{mod}10000)$ d sono tali che $100000|a + b$ se e solo se $a + b = 0(\text{mod}10000)$. Dunque a e b verificano la condizione richiesta dal problema se e solo se $a = b(\text{mod}10000)$ oppure $a + b = 0(\text{mod}10000)$. Questa condizione partiziona i numeri naturali in 5001 classi: una prima classe raccoglie i numeri le cui ultime 4 cifre sono 0000; una seconda classe raccoglie i

numeri le cui ultime 4 cifre sono 0001 o 9999; una terza classe raccoglie i numeri le cui ultime 4 cifre sono 0002 o 9998, e così via fino alla 5001-esima che raccoglie i numeri le cui ultime 4 cifre sono 5000.
Per il Pigeonhole Principle la condizione richiesta è verificata quando si scrivono 5002 numeri.
La risposta è `5002`.

Soluzione del problema 16. Basta verificare che, accostando le figure in modo da eliminare gli angoli acuti, si ottengo due rettangoli con un triangolo rettangolo e un trapezio, eventualmente inserendo il parallelogramma tra i due:



I due rettangoli ha perimetri di $(8\,\mathrm{cm} + 5\,\mathrm{cm}) \times 2 = 26\,\mathrm{cm}$ e $26\,\mathrm{cm} + 7\,\mathrm{cm} \times 2 = 40\,\mathrm{cm}$. Per formare una T, si accosta un lato minore a un lato maggiore. Il perimetro della T è $26\,\mathrm{cm} + 40\,\mathrm{cm} - 5\,\mathrm{cm} \times 2 = 56\,\mathrm{cm} = 560\,\mathrm{mm}$.
La risposta è `0560`.

Soluzione del problema 17. Consideriamo una data distribuzione delle carte. Le possibilità sono 3: vince Samurai Futaba, perde Samurai Futaba, la partita finisce in pareggio.
Se Samurai Futaba vincesse, nel caso speculare (quello in cui Samurai Futaba ha le carte di Mr. Dantley e viceversa), Samurai Futaba perderebbe; viceversa, se Samurai Futaba perdesse, nel caso speculare vincerebbe. Quindi a patto di dividere per 2 il problema si trasforma nel contare quanti sono i casi in cui i 2 amici pareggiano. Per finire tutte le carte è chiaro come un amico debba avere tutte le carte dispari e l'altro tutte quelle pari (immediata conseguenza del fatto che giocano una carta a testa consecutiva a quella precedentemente scartata). La strategia migliore di colui che ha le carte dispari è quella di giocare sempre la carta con numero precedente a quello appena scartato. Altrimenti, giocando il successivo, darebbe al secondo (utilizzando la stessa strategia) di batterlo. In questo modo la partita finirà in pareggio. Quindi

$$P = \frac{\frac{\binom{16}{8} - 2}{2}}{\binom{16}{8}} = \frac{3217}{6435}.$$

Dunque la risposta è $3217 + 6435 = 9652$.
La risposta è `9652`.

Soluzione del problema 18. Siano $z_1 < z_2 < z_3 < \ldots < z_{21}$ i numeri che compaiono in un tale elenco. Dato che $z_n \leq z_{n+1}$ per $n = 1, \ldots, 20$, si ha che $z_{n+1} - z_n \geq 1$; dunque $z_{n+k} - z_n \geq k$ per $1 \leq k \leq 21 - n$. La condizione richiesta per le somme è verificata se e solo se vale per

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_{11} > z_{12} + z_{13} + \ldots + z_{21}.$$

Da questa si ottiene che $z_1 > (z_{12} - z_2) + (z_{13} - z_3) + \ldots + (z_{21} - z_{11}) \geq 10 \cdot 10 = 100$. Si nota ora che l'elenco dei 21 numeri da 101 a 121 verifica la condizione richiesta dal problema.
La risposta è `0101`.

Soluzione del problema 19. Sia $d = b + c$. Dalle due identità si ottiene $(5 - b)^2 + b^2 + (d - b)^2 - 26 = 0$, cioè

$$3b^2 - 2(d + 5)b + d^1 - 1 = 0$$

che ha soluzioni reali se e solo se

$$(d + 5)^2 - 3d^2 + 3 \geq 0.$$

La condizione si riscrive $0 \geq 2d^2 - 10d - 28 = 2(d + 2)(d - 7)$. Perciò, l'equazione in b ha soluzioni reali se e solo se $-2 \leq d \leq 7$. Dato che $d \geq 7$, si ha che $d = 7$, il discriminante dell'equazione vale 0 e l'unica terna che verifica le tre condizioni è $b = 4$, $a = 1$, $c = 3$.

La risposta è 0008.

Soluzione del problema 20. Sia d_n il numero di divisori diversi da 1 del numero naturale n. Ricordando la formula per dedurre il numero di divisori di un naturale n dalla sua scomposizioni in fattori primi, possiamo scrivere le seguente tabella.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
d_n	1	1	2	1	3	1	3	2	3	1	5	1	3	3	4	1	5	1	5	3

La strategia migliore per Samurai Futaba è di ripetere il numero appena udito da Mr. Dantley. Infatti se n è il numero detto da Mr. Dantley, il risultato del dado deve essere un multiplo di n. Poiché $d_n < d_{mn}$ con $m \in \mathbb{N}_{>1}$, la probabilità che sia uscito il numero n è maggiore della probabilità che sia uscito il numero mn. Infatti per la probabilità condizionata, chiamata con X la variabile del risultato uscito sul dado e con E_n l'evento "Mr. Dantley dice il numero n",

$$\mathbb{P}[X = n|E_n] = \frac{\mathbb{P}[X = n \ \cap \ E_n]}{\mathbb{P}[E_n]} = \frac{\frac{1}{d_n} \cdot \frac{1}{20}}{\mathbb{P}[E_n]},$$

mentre

$$\mathbb{P}[X = nm|E_n] = \frac{\mathbb{P}[X = nm \ \cap \ E_n]}{\mathbb{P}[E_n]} = \frac{\frac{1}{d_{nm}} \cdot \frac{1}{20}}{\mathbb{P}[E_n]}.$$

Quindi Samurai Futaba vince se e solo se Mr. Dantley dice esattamente il numero uscito, pertanto la probabilità cercata è

$$\frac{1}{20} \sum_{n=2}^{21} \frac{1}{d_n} = \frac{237}{400}.$$

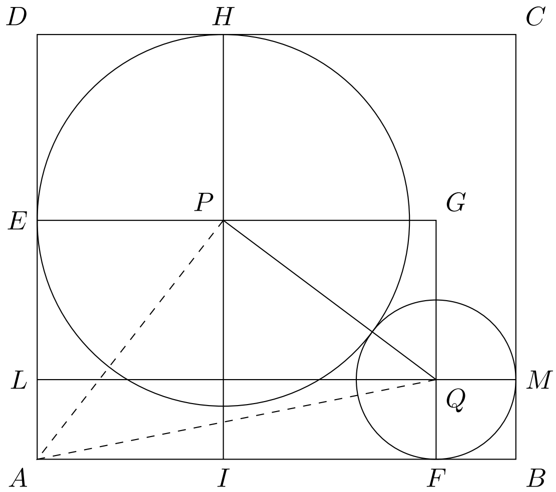
La risposta è 0637.

Soluzione del problema 21. Osserviamo che con le prime due pescate non è possibile realizzare 21 o più, Quindi distinguiamo a seconda dei possibili valori che possono avere le prime due carte sommate. A noi interessano i valori da 2 a 16, perché solo in questi casi il giocatore ha possibilità di realizzare 21. Se la somma delle prime due carte è compresa tra 2 e 10 non è possibile realizzare 21 solo con la terza carta. Quindi, sia s la somma delle prime 2 carte (compresa tra 2 e 16), allora deve essere $11 \leq s + v \leq 16$ o $s + v = 21$, dove v rappresenta il valore della terza carta. Rappresentiamo ora le possibilità in una tabella (tutti i valori riportati sono immediati da trovare):

s	Modi per ottenere s	Modi in cui si può ottenere 21 a partire da s
2	1	2 + 6
3	2	3 + 6
4	3	4 + 6
5	4	5 + 6
6	5	6 + 6
7	6	6 + 3
8	7	6 + 3
9	8	6 + 3
10	9	6 + 3
11	10 + 6	6 + 3
12	9 + 6	5
13	8 + 6	4
14	7 + 6	3
15	6 + 6	2
16	5 + 6	1

dove i +3 e i +6 contano i casi in più derivati dal fatto che le carte che valgono 10 sono 4 e non una sola. A questo punto i casi totali sono $1 \times 8 + 2 \times 9 + 3 \times 10 + 4 \times 11 + 5 \times 12 + 6 \times 9 + 7 \times 9 + 8 \times 9 + 9 \times 9 + 16 \times 9 + 15 \times 5 + 14 \times 4 + 13 \times 3 + 12 \times 2 + 11 \times 1 = 779$.
La risposta è 0779.

Soluzione del problema 22. Si consideri la figura



Siano r e s le lunghezze dei raggi delle circonferenze di centro P e Q rispettivamente. Il segmento PQ passa per il punto di tangenza delle due cirocnferenze. Considerato il triangolo rettangolo PQG e posto $a = r + s$ si ha che $a^2 = (9 - a)^2 + (8 - a)^2$, usando come unità di misura dakm e tralasciandole. Dunque $a^2 - 34a + 145 = 0$, cioè $a = 5$ oppure $a = 29$. Ma $a = r + s \leq 5$, perciò $r + s = a = 5$. L'area di APQ si calcola sottraendo all'area del rettangolo $AFGE$ le aree dei tre triangoli AFQ, QGP e APE. Ricordando che $r + s = 5$, si ha che

$$\begin{aligned}
&(9-s)(8-r) - \tfrac{1}{2}\left[s(9-s) + (9-a)(8-a) + r(8-r)\right] = \\
&= 72 - 9r - 8s + rs - \tfrac{1}{2}[9s - s^s + 12 + 8r - r^2] \\
&= 72 - 45 + s + rs - \tfrac{1}{2}[40 + s + 12 - s^2 - r^2] \\
&= 27 + s + \tfrac{25}{2} - 26 - \tfrac{s}{2} \\
&= 13 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{s}{2}.
\end{aligned}$$

Il massimo si ottiene per il massimo valore possibile per s che è 4.
La risposta è `1550`.

Soluzione del problema 23. Supponiamo senza perdere di generalità $a \geq b$. Consideriamo 110 e 9263. Una delle due cifre delle unità deve essere errata. Infatti se 0, la cifra delle unità della somma, fosse giusta, le cifre delle unità di a e b potrebbero essere $(0, 0), (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5)$; nessuna di queste produce 3 (cifra delle unità del prodotto), una volta moltiplicate.
Consideriamo il $110 = a + b$. Supponiamo che lo 0 sia corretto. Allora il 3 di $9263 = a \cdot b$ è sbagliato. Pertanto, guardando le coppie di cifre possibili per l'unità di a e b, $a \cdot b$ può essere 9260, 9261, 9264, 9265, 9266 o 9269. Scomponendo pertanto i possibili prodotti si ottiene:

- $9260 = 2^2 \cdot 5 \cdot 463$. Ma a e b dovrebbero finire entrambi per 0, quindi non c'è possibilità. Si osservi che per escludere questo numero non è necessario scomporlo, basta verificare che non è divisibile per 100.

- $9261 = 3^3 \cdot 7^3$. Siccome a e b dovrebbero avere come unità 3 e 7 l'unica possibilità è $a = 147$ e $b = 63$. Pertanto $a + b = 210$ che è diverso da 110 per una cifra. Quindi abbiamo trovato una possibile soluzione.

- $9264 = 2^4 \cdot 3 \cdot 193$. Siccome a e b dovrebbero avere come unità 4 e 6 le uniche possibilità sono $a = 386$ e $b = 24$ o $a = 1544$ e $b = 6$. Pertanto $a + b = 410$ che è diverso da 110 per una cifra, o $a + b = 1550$, che non è accettabile. Abbiamo così trovato una seconda possibile soluzione.

- $9265 = 5 \cdot 17 \cdot 109$. Ma a e b dovrebbero finire entrambi per 5, quindi non c'è possibilità. Si osservi che per escludere questo numero non è necessario scomporlo, basta verificare che non è divisibile per 25.

- $9266 = 2 \cdot 41 \cdot 113$. Siccome a e b dovrebbero avere come unità 2 e 8 non c'è possibilità. Si osservi che per escludere questo numero non è necessario scomporlo, basta verificare che non è divisibile per 4.
- $9269 = 13 \cdot 23 \cdot 31$. Siccome a e b dovrebbero avere come unità 1 e 9 l'unica possibilità è $a = 299$ e $b = 31$. Pertanto $a + b = 330$ che è diverso da 110 per più di una cifra. Pertanto non c'è soluzione.

Supponiamo che lo 0 di 110 sia sbagliato. Allora $a + b < 120$. Ma allora $a \cdot b \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 < 60^2 = 3600$. Pertanto la cifra delle migliaia di 9263 deve essere errata e minore di 4. Siccome questo vuol dire che la cifra dell'unità del prodotto (3) è corretta le possibili cifre delle unità per a e b sono solo 1 e 3 oppure 7 e 9. Pertanto scomponiamo ancora i possibili prodotti in questo caso, 1263, 2263 e 3363, alla ricerca di possibili soluzione.

- $1263 = 3 \cdot 421$. Ma $421 + 3 = 424$ che è diverso da 110 per più di una cifra; quindi non c'è possibilità per a e b.
- $2263 = 31 \cdot 73$. Ma $31 + 73 = 104$ che è diverso da 110 per più di una cifra; quindi non c'è possibilità per a e b.
- $3263 = 13 \cdot 251$. Ma $13 + 251 = 264$ che è diverso da 110 per più di una cifra; quindi non c'è possibilità per a e b.

Abbiamo pertanto trovato quattro coppie ordinate (a, b) possibili: $(147, 63), (63, 147), (386, 24), (24, 386)$.
Quindi la risposta è 386.
La risposta è `0386`.

Soluzione del problema 24. Se due carte di seme diverso sono attaccate, almeno una delle due è un Re: la prima delle due carte non può essere una carta con un numero perché la segue una carta di seme diverso e nessuna delle due può essere una carta senza numero che dice il vero: deve pertanto essere un Re. Dato che ci sono due Re, ci possono essere al massimo due cambi di seme.
Consideriamo il caso che ci sia solo un cambio di seme in tutto il mazzo. Ciò vuol dire che ci saranno prima tutte le carte di un seme che terminano con il Re, poi tutte le carte dell'altro seme. Il Re del secondo seme, siccome mente, deve per forza stare vicino al Re del primo; a seguire, le ultime 8 posizioni del mazzo, per rispettare la frase detta dai numeri, devono essere occupate, nell'ordine, dal 7, 6, 5, 4, 3, 2 e dalle ultime due figure, il Fante e la Regina, queste due nell'ordine che preferiscono. Per le prime 8 posizioni c'è invece più libertà: il 7 può occupare la prima o la seconda posizione, il 6 quella non occupata dal 7 o la terza, il 5 quella non occupata dal 6 e dal 7 o la quarta e così via. I modi possibili per questo caso sono pertanto: $2 \cdot 2^6 \cdot 2 \cdot 2 = 2^9 = 512$.
Consideriamo poi il caso che ci siano 2 cambi di seme. La disposizione delle carte è pertanto costituito da tre blocchi di carte dello stesso seme. Consideriamo le carte che costituiscono il secondo dei due cambi di seme. La carta che precede abbiamo già osservato che è un Re, ma la carta che segue non può esserlo perchè l'altro Re è impegnato per il primo cambio. Pertanto deve essere un numero. Ora, un numero porta con sè inevitabilmente almeno altre 2 carte dello stesso seme: pertanto il 7 deve stare in questo blocco e non nel primo perchè non vi sarebbero abbastanza carte. Ma il 7 si porta con sè altre 7 carte; considerato che per questo seme il Re deve stare inevitabilmente nel primo blocco, nel primo blocco c'è solo il Re e nel terzo le carte dal 7 al 2 e in fondo la Regina e il Fante nell'ordine che preferiscono. Consideriamo ora il secondo seme, tutto raccolto nel secondo blocco: il 7 può occupare la prima o la seconda posizione, il 6 quella non occupata dal 7 o la terza, il 5 quella non occupata dal 6 e dal 7 o la quarta e così via; ma attenzione! Se il 7 occupa la seconda posizione, il 6 la terza, il 5 la quarta,...,il 2 la settima, uno tra la Regina e il Fante occuperebbe la prima e questo non è possibile perché sarebbe preceduto dal Re dell'altro seme. Con questo accorgimento, i modi possibili per questo caso sono: $2 \cdot (2^6 - 1) \cdot 2 \cdot 2 = 2^9 - 2^3 = 512 - 8 = 504$.
Pertanto la risposta è $512 + 504 = 1016$
La risposta è `1016`.